

28 1. Le système (café) cède de l'énergie à l'environnement.

2. $T_{\text{amb}} = 25 \text{ °C}$

3. La solution générale de l'équation différentielle est :

$$T(t) = A \cdot e^{\gamma \cdot t} + B$$

Quand t tend vers l'infini, $T = T_{\text{amb}}$ donc $B = T_{\text{amb}}$.

À $t = 0$ s, $T = T_0$ donc $T_0 = A + T_{\text{amb}}$ donc $A = T_0 - T_{\text{amb}}$.

Donc :

$$T(t) = (T_0 - T_{\text{amb}}) \cdot e^{\gamma \cdot t} + T_{\text{amb}}$$

D'où l'expression de $T(t)$ en fonction de γ :

$$T(t) = (75 - 25)e^{\gamma \cdot t} + 25$$

Donc :

$$T(t) = 50e^{\gamma \cdot t} + 25$$

4. a. Après 5 minutes, le café est à 50 °C.

$$\text{Donc } T(5) = 50e^{\gamma \times 5} + 25 = 50$$

$$\text{Donc } e^{5\gamma} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } 5\gamma = \ln \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } \gamma = -\frac{\ln 2}{5}.$$

b. On en déduit l'expression générale de $T(t)$:

$$T(t) = 50e^{-\frac{\ln 2}{5}t} + 25$$